Introduction

On envisage dans ce chapitre, différentes situations où deux signaux sinusoïdaux se superposent. Il s'agira de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence donnant **le phénomène d'interférences**. Puis on considèrera deux signaux de fréquences voisines donnant le phénomène de **battements**. Enfin, on étudiera un nouveau type d'onde obtenu par superpositions de deux ondes progressant en sens inverse, **l'onde stationnaire.**

Principe de superposition

Une des propriétés la plus basique des ondes est la possibilité pour deux ondes de se combiner en une seule onde dont la perturbation résultante est donnée par **le principe de superposition.**

Principe de Superposition

Quand une ou plusieurs ondes sont simultanément présentes en un point de l'espace, à un instant donnée, la perturbation résultante du milieu, en ce point et à ce même instant, est la somme des perturbations de chaque onde individuelle. D'un point de vue mathématique, la fonction d'onde totale est la somme des fonctions d'onde individuelle :

$$S_{tot}(x,t) = S_1(x,t) + S_2(x,t) + \ldots = \sum_i S_i(x,t)$$

Interférences entre deux ondes de même fréquence

Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (1)

Soit les deux signaux $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Quelle est l'amplitude du signal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

Le signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence d'amplitudes A_1 et A_2 et de phases initiales φ_1 et φ_2 est un signal sinusoïdal de même fréquence et d'amplitude donnée par **la formule des interférences :**

$$\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}}$$

Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (2)

❑ L'amplitude du signal résultant de la superposition n'est pas la somme des amplitudes des signaux initiaux.

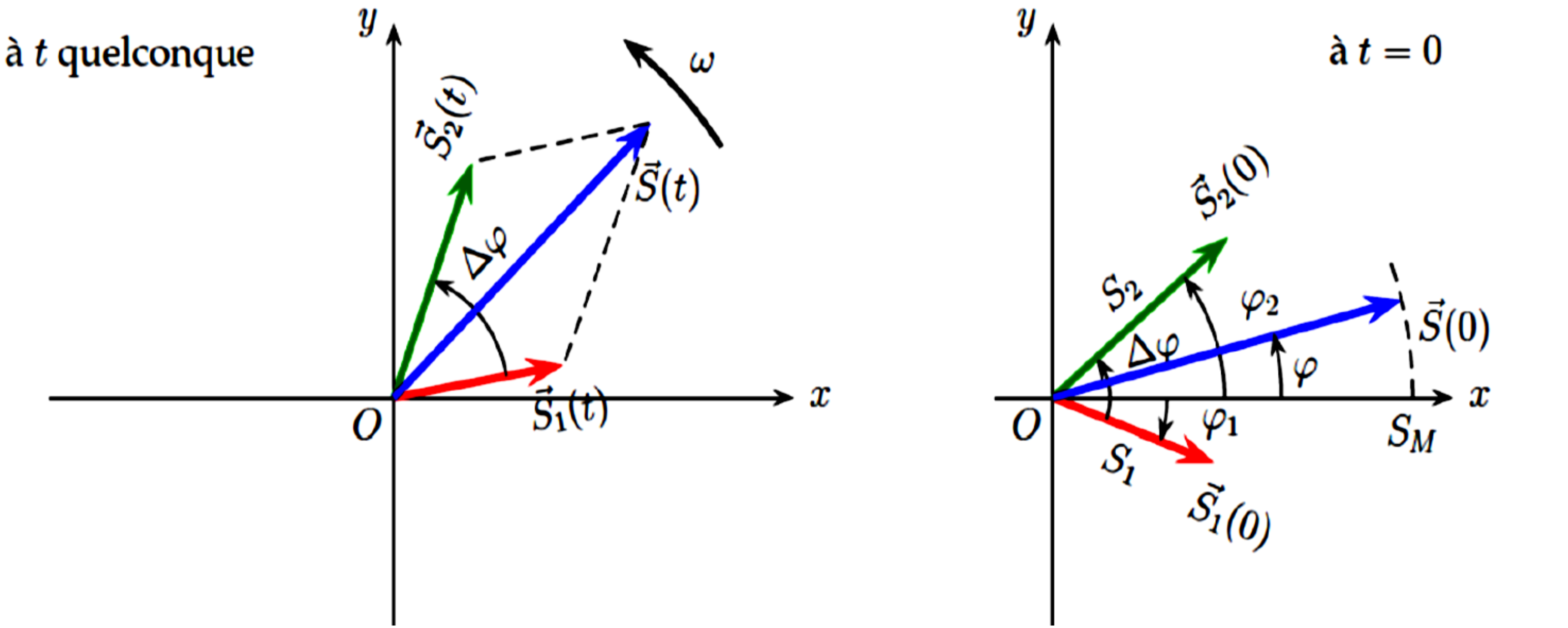
❑ Si les amplitudes sont identiques, l'amplitude résultante peut s'écrire:

$$\boldsymbol{A = 2A_1|\cos(\Delta\varphi/2)|}$$

❑ L'intensité résultante n'est pas la somme des intensités. Si c'était le cas, la superposition de deux sons serait toujours un son plus fort, de deux lumières, une lumière plus vive. Or, les expressions de l'amplitude et surtout de l'intensité montrent qu'elles peuvent s'annuler grâce au terme en $cos\Delta\varphi$. **Ainsi la superposition de deux sons peut donner lieu à un silence, celle de deux lumières à l'obscurité.**

Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (3)

La formule de l'amplitude A peut s'établir simplement en utilisant la **représentation des signaux sinusoïdaux par les vecteurs de Fresnel.**



Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (4)

$$\|\vec{S}_1\| = A_1 \quad et \quad \|\vec{S}_2\| = A_2$$

$$A^2 = \|\vec{S}\|^2 = \vec{S}^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 . \vec{S}_2$$

$$\Longrightarrow A^2 = \|\vec{S}_1\|^2 + \|\vec{S}_2\|^2 + 2\|\vec{S}_1\|\|\vec{S}_2\| \cos\left(\widehat{\vec{S}_1 . \vec{S}_2}\right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

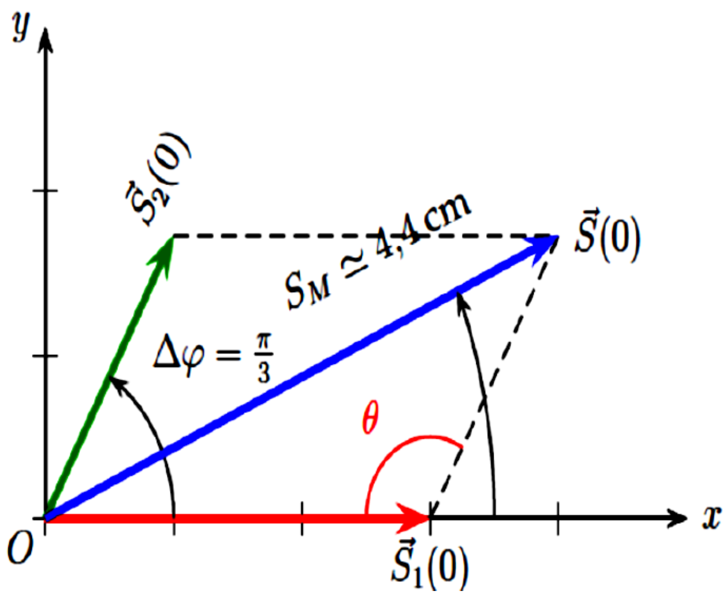
$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}}}}$$

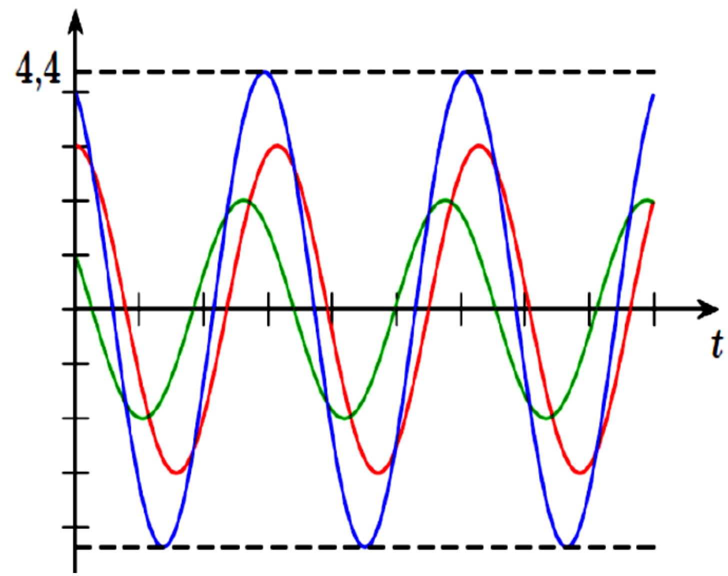
où $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$. On retrouve bien la formule de l'amplitude.

Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (5)

<u>Exemple</u> : déterminons en utilisant la méthode de Fresnel l'amplitude et la phase à l'origine de

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = 3\cos\omega t + 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$





$$\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \Longrightarrow S_M = \sqrt{9 + 4 + 2\times 6\cos\frac{\pi}{3}} = 4{,}35\ cm}$$

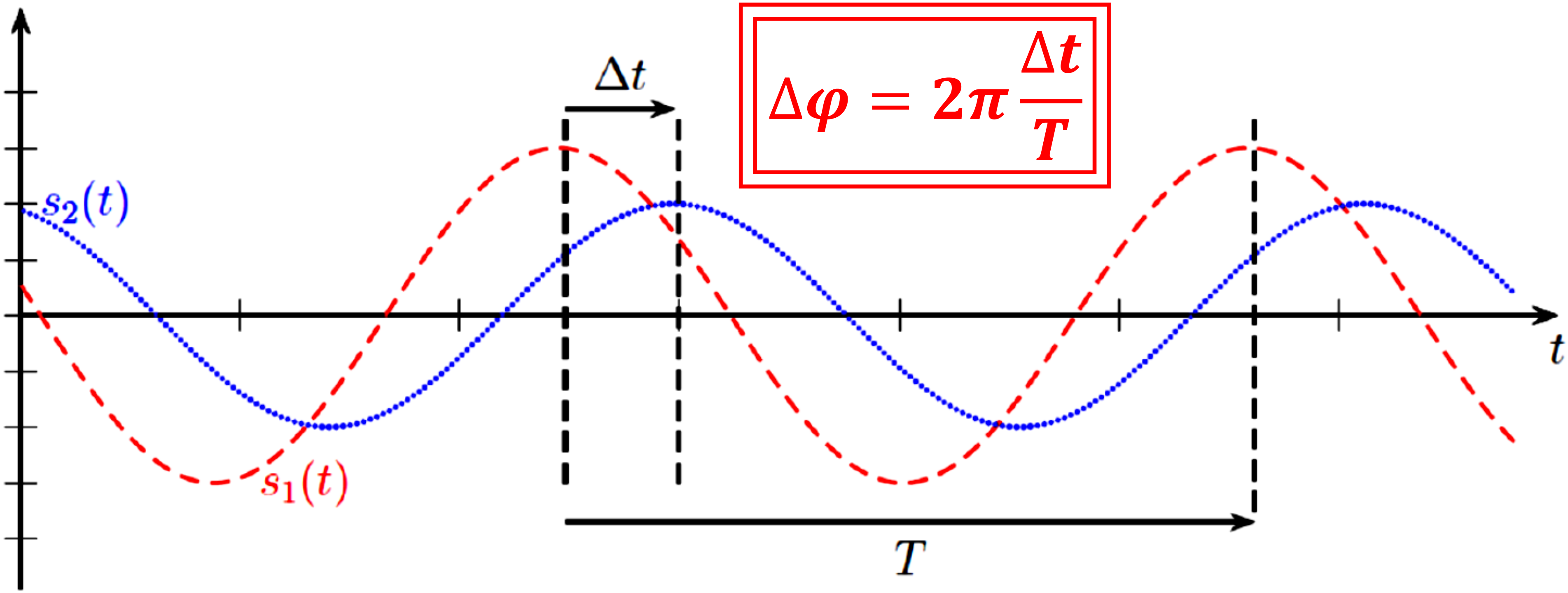
Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (6)

❑ Déphasage entre deux signaux synchrones

Soient les grandeurs sinusoïdales synchrones :

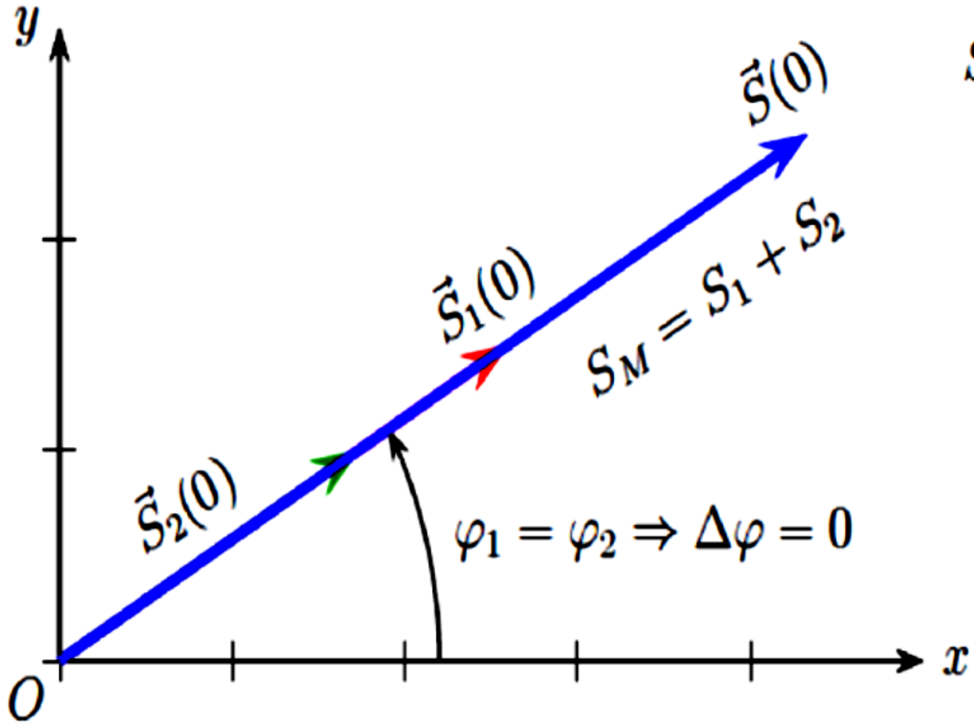
$$s_1(t) = S_1\,cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_2\,cos(\omega t + \varphi_2)$$

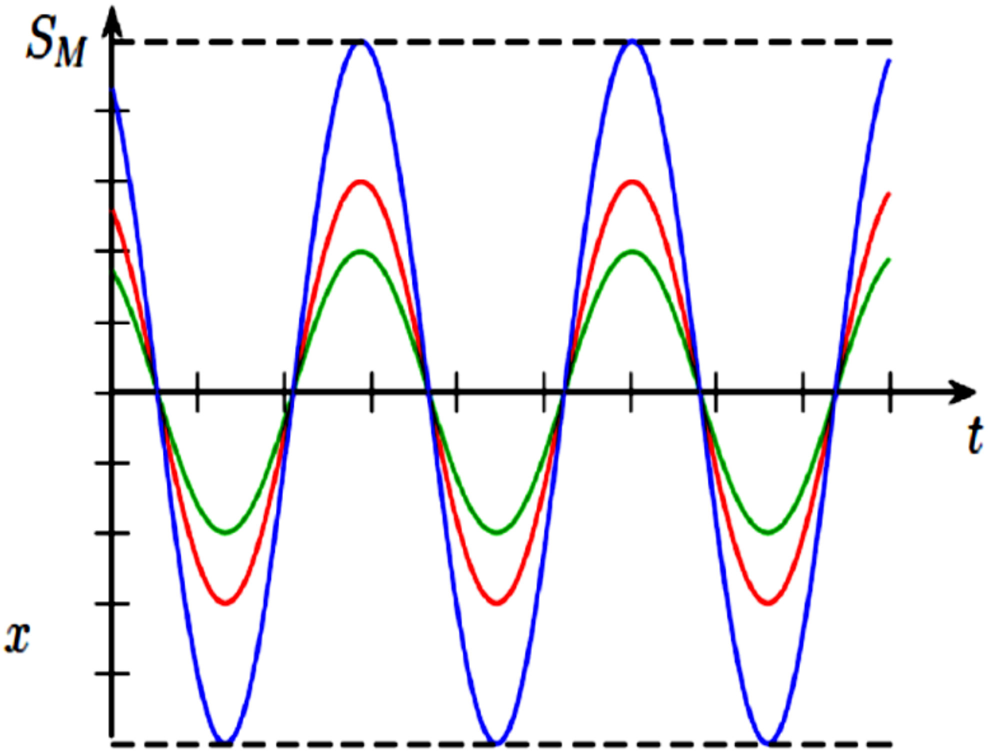
$$\boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$$



Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (7)

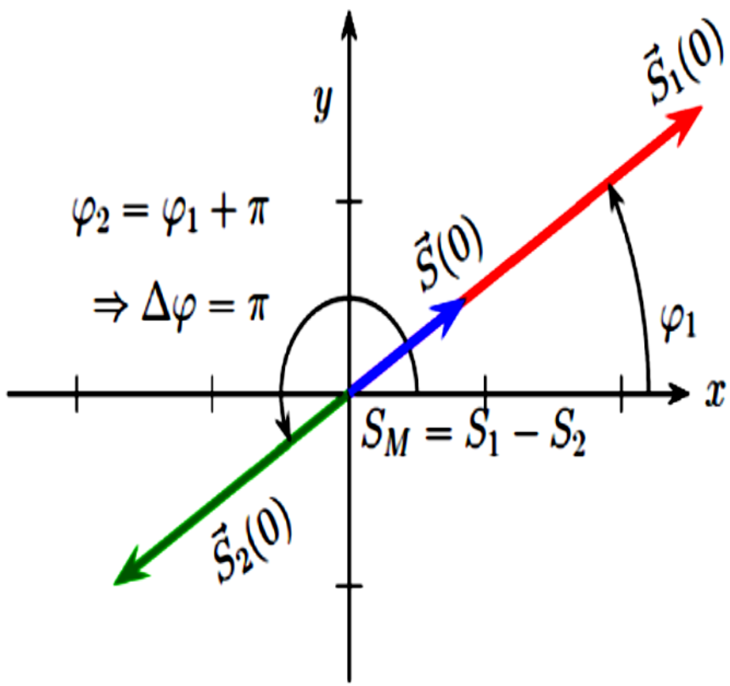
- **Signaux en phase** : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en phase, ils atteignent leur maximum au même instant, pas de décalage temporel : $\boldsymbol{\Delta t = 0 \Longrightarrow \Delta\varphi = 0}$.

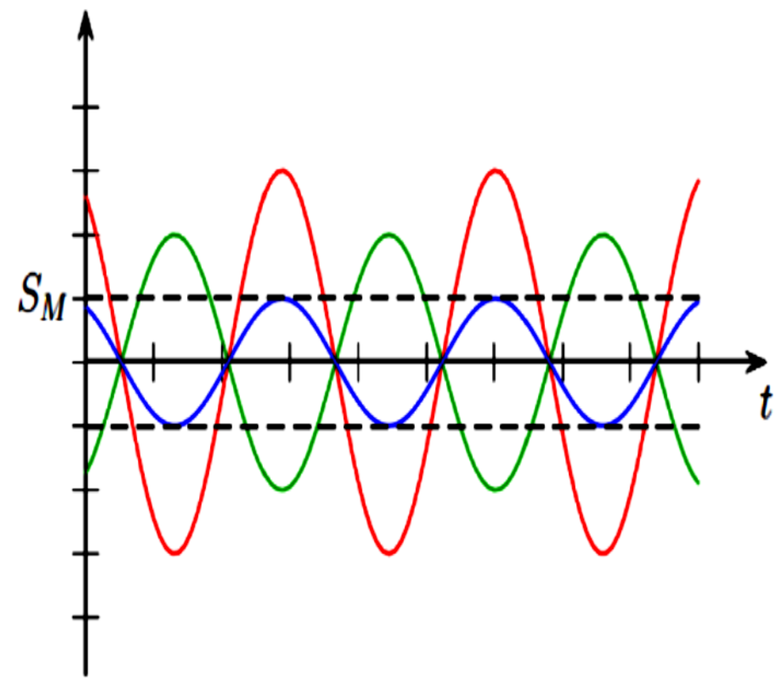




Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence (8)

❑ **Signaux en opposition de phase** : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en opposition de phase, un des deux atteint son maximum lorsque l'autre atteint son minimum, décalage temporel d'une demi période : $\boldsymbol{\Delta t = T/2 \Longrightarrow \Delta\varphi = \pm\pi}$.





Maximum et minimum d'amplitude (1)

❑ **L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est maximale lorsque les signaux sont en phase.**

La valeur maximale de A est :

$$A_{max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{max} = A_1 + A_2}}$$

❑ **L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase.**

La valeur minimale de A est :

$$A_{min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{min} = |A_1 - A_2|}}$$

Maximum et minimum d'amplitude (2)

Dans le cas où les deux ondes ont des amplitudes égales on a :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2 \cos \Delta\varphi} = A_1\sqrt{2 + 2\cos \Delta\varphi} \Longrightarrow$$

$$A = 2A_1 \left|\cos \frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

Les valeurs maximale et minimale de A sont dans ce cas :

$$\boxed{\boldsymbol{A_{max} = 2A_1}} \qquad \boxed{\boldsymbol{A_{min} = 0}}$$

Ainsi la superposition de deux ondes en opposition de phase peut donner un signal nul. **Ceci est utilisé pour les isolations phoniques actives de certains casques. Un dispositif capte le bruit ambiant et envoie dans l'oreille un signal exactement en opposition de phase qui annule ce bruit**.

Phénomènes d'Interférences

Définitions

- Il y a **interférences** quand des ondes de même fréquence et présentant un déphasage $\Delta\varphi$ indépendant du temps se superposent.

- Le terme $\mathbf{2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ dans l'amplitude résultant de cette superposition est appelé **termes d'interférences**.

Différence de phase, Différence de marche (1)

Lorsque deux ondes sinusoïdales de même fréquence sont émises par deux points sources S_1 et S_2 **en phase,** on appelle **différence de marche** au point M, la quantité $\delta(\mathrm{M}) = \mathrm{S_2M} - \mathrm{S_1M}$ égale à la différence entre les chemins parcourus par les deux ondes depuis les sources. Elle correspond aussi à la distance supplémentaire parcourue par l'onde 2 par rapport à l'onde 1 au point où les deux ondes vont se combiner. **La différence de phase** entre les deux ondes s'écrit au point M :

$$\boxed{\Delta\varphi_M = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

Différence de phase, Différence de marche (2)

Remarque: Si les sources ne sont pas en phase on aura:

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\varphi_M = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \Delta\varphi_{\text{entre les sources}} = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \Delta\varphi_0}}$$

$\Delta\varphi_{\text{entre les sources}} = \Delta\varphi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ correspond à la **différence de phase à l'origine entre les deux sources**. Si les deux sources sont identiques, ce que l'on va souvent considérer, $\Delta\varphi_0 = 0$

Interférences constructives, Interférences destructives (1)

❑ **Les interférences constructives (addition des signaux)** se produisent aux points où les ondes parviennent en phase, pour $\Delta\varphi_M = 0\ [2\pi]$. Pour ces points, **la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde**.

$$\Delta\varphi_M = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2m\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\delta = m\lambda}}$$

où m est un entier relatif

Physiquement, les ondes sont en phases, leurs maximums sont décalés d'une longueur d'onde, **ils se superposent, les ondes se « renforcent » pour produire une onde résultante d'amplitude plus importante.**

Interférences constructives, Interférences destructives (2)

❑ **Les interférences destructives (compensation de signaux)** se produisent aux points où les ondes parviennent en opposition de phase, pour $\Delta\varphi_M = \pi\ [2\pi]$. Pour ces points, **la différence de marche vaut un demi entier de la longueur d'onde**.

$$\Delta\varphi_M = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2m+1)\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\delta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}}$$

où m est un entier relatif.

Physiquement, les ondes sont en opposition de phases, le maximum de l'une correspond au minimum de l'autre car elles sont décalés d'un multiple d'une demi longueur d'onde, **les ondes se « détruisent » pour produire une onde résultante d'amplitude nulle.**

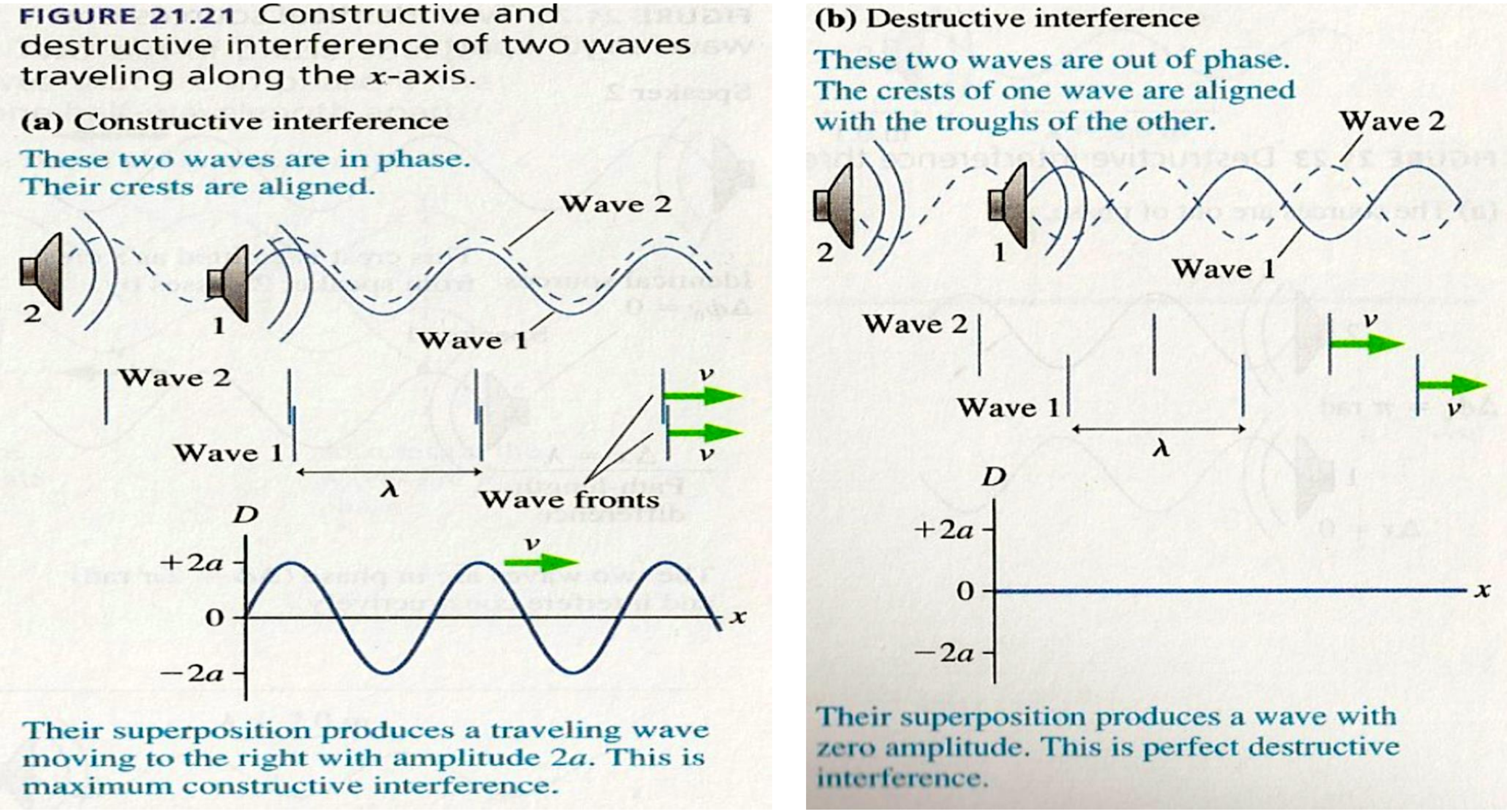
Interférences constructives, Interférences destructives (3)

On définit l'ordre d'interférences p tel que :

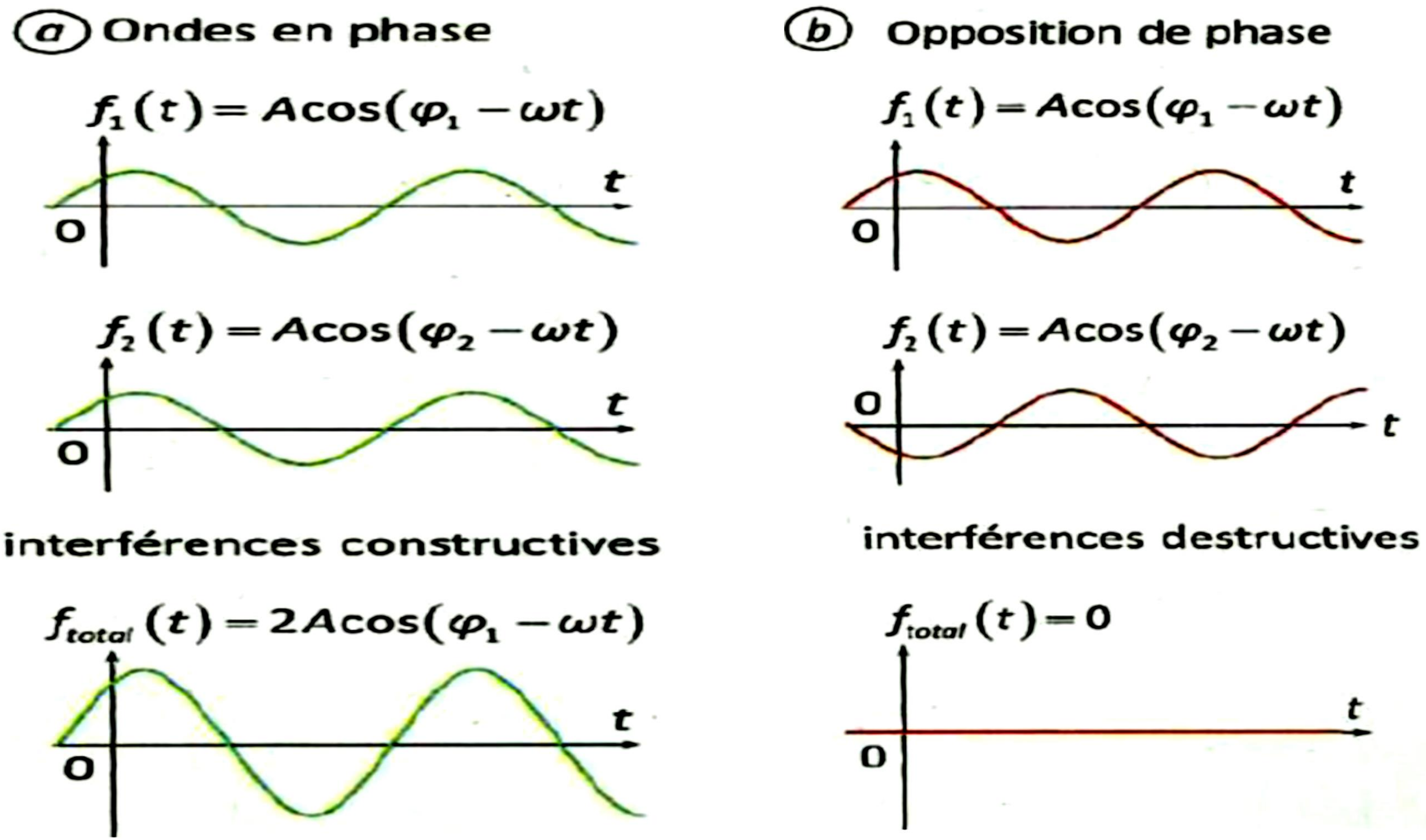
$$\boxed{p = \frac{\delta}{\lambda}}$$

On parle **d'interférences constructives** lorsque l'ordre d'interférence p est un nombre entier. Dans ce cas, les amplitudes des signaux incidents s'ajoutent. On parle **d'interférences destructives** lorsque l'ordre d'interférence p est un nombre demi-entier. Dans ce cas les amplitudes des signaux incidents se compensent.

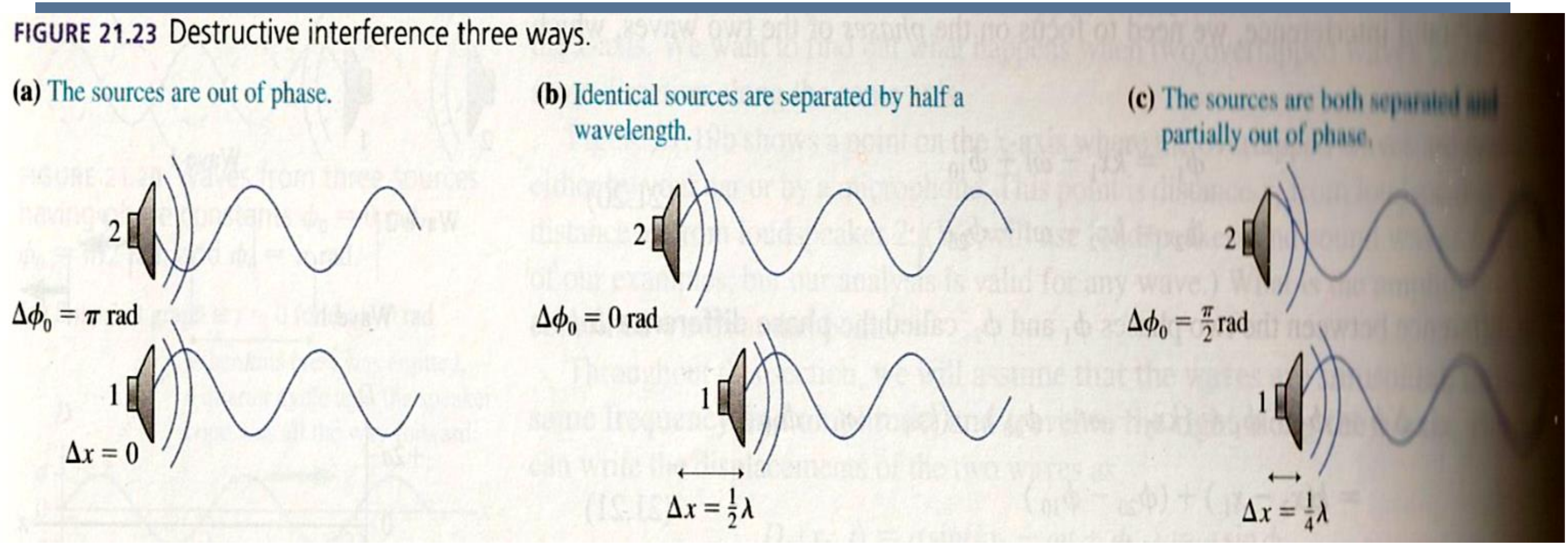
Interférences constructives, Interférences destructives (4)



Interférences constructives, Interférences destructives (5)



Interférences constructives, Interférences destructives (6)



NB : Une interférence destructive parfaite (cas où l'amplitude de l'onde résultante est nulle) n'est possible que dans le cas où l'amplitude des deux ondes est identique comme nous l'avons supposé. Deux ondes d'amplitude différente peuvent interférer de façon destructive mais l'annulation ne sera pas parfaite ; l'onde résultante aura une amplitude faible mais pas nulle.

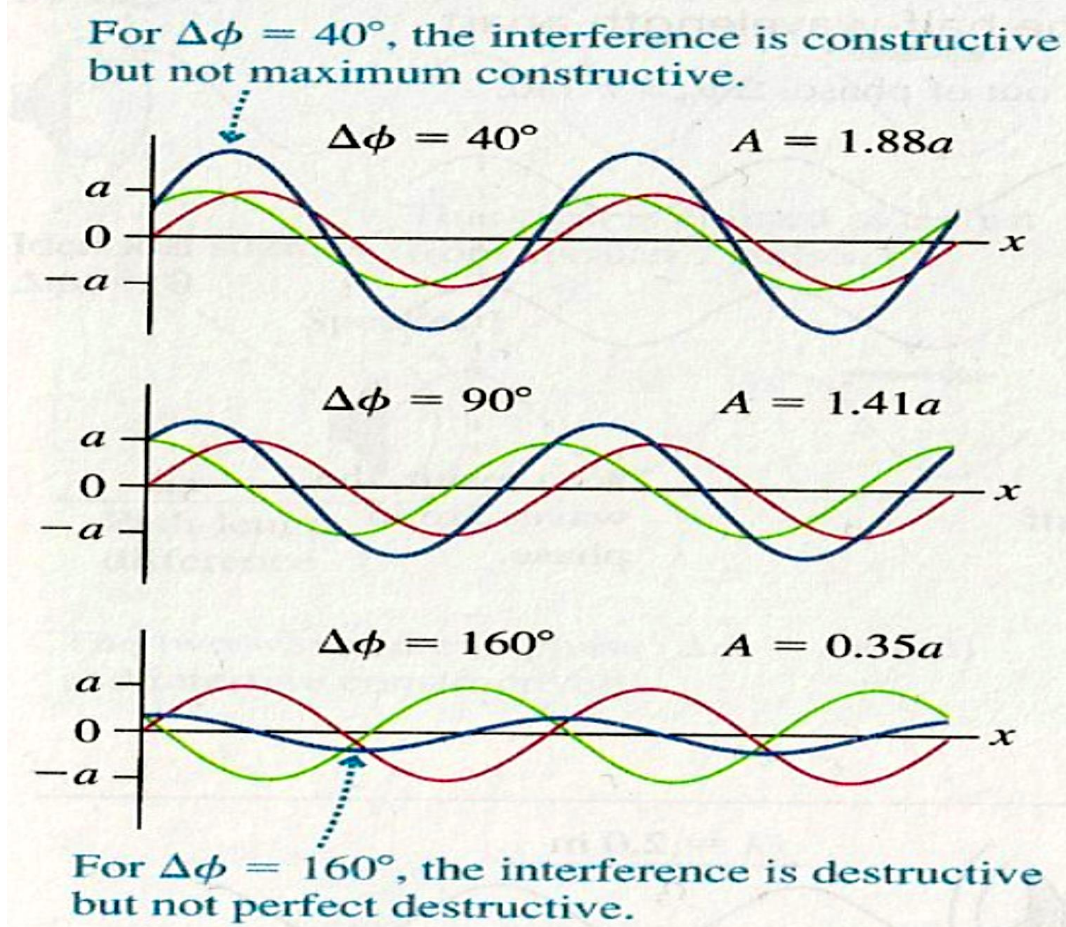
Interférences constructives, Interférences destructives (7)

Interférences constructives	Interférences destructives
$\Delta\varphi = m \times 2\pi$ avec $m = 0,1,2,3,....$ Soit $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, ...$	$\Delta\varphi = (2m+1) \times \pi$ avec $m = 0,1,2,3,....$ Soit $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi....$
Si sources identiques $(\Delta\varphi_0 = 0)$	
$\delta = m\lambda$ Soit $\delta = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, ...$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ Soit $\delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \frac{7\lambda}{2}, ...$

Interférences constructives, Interférences destructives (8)

Pour un déphasage $\Delta\varphi$ quelconque, l'interférence des deux ondes va produire une onde résultante dont **l'amplitude sera comprise entre 0 et 2A** . Cela est illustré sur la figure ci-contre.

FIGURE 21.25 The interference of two waves for three different values of the phase difference.



Cas de 2 fréquences voisines: notion de battements

Signal résultant (1)

Considérons deux signaux de pulsations différentes ω_1 et ω_2, mais proches, c'est-à-dire que l'on va poser $\omega_1 = \omega - \delta\omega$ et $\omega_2 = \omega + \delta\omega$. Supposons pour simplifier les calculs que les signaux ont même amplitude et même phase à l'origine.

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = S_0 \cos(\omega_1 t) + S_0 \cos(\omega_2 t)$$

En utilisant la formule trigonométrique

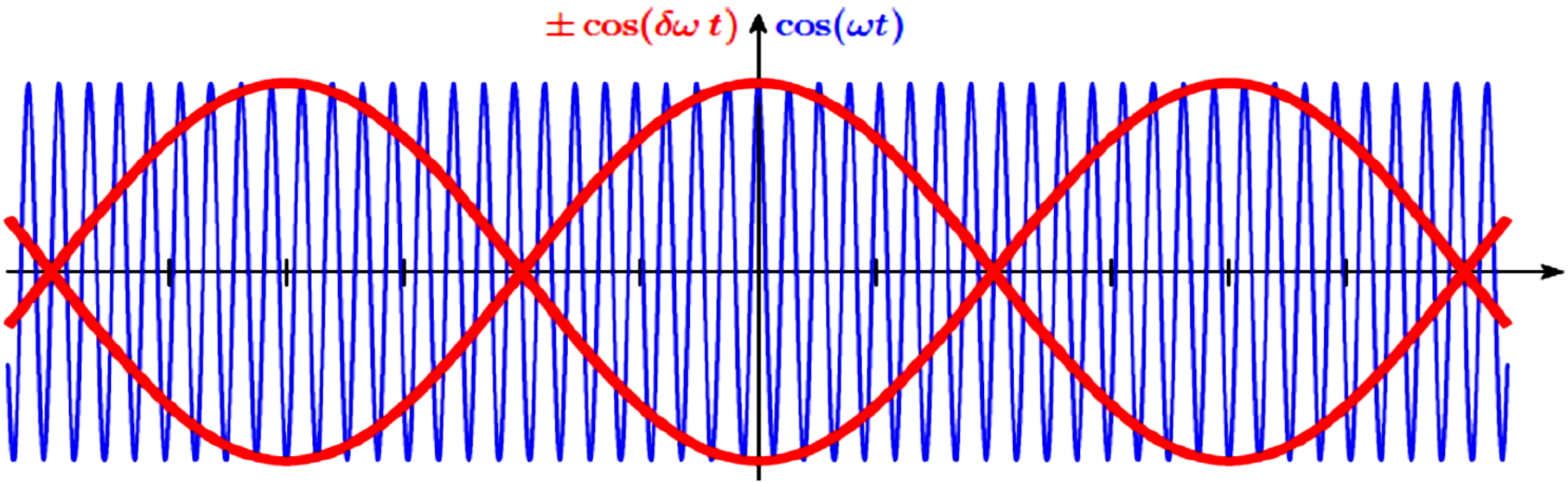
$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

On peut écrire $s(t)$ sous la forme :

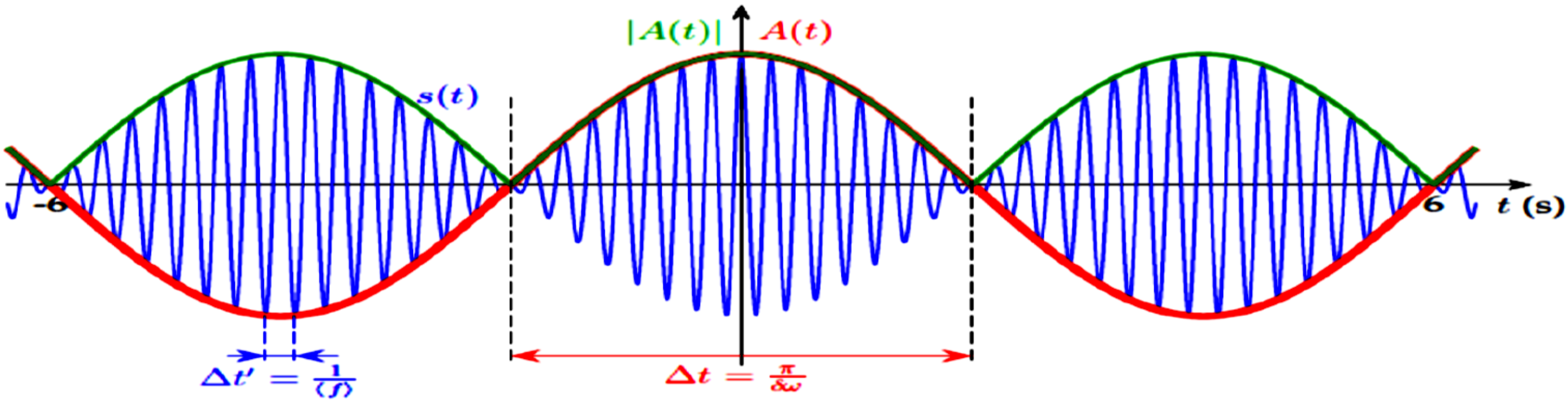
$$\boxed{\boldsymbol{S(t) = 2S_0\, cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = 2S_0\, cos(\omega t)\, cos(\delta\omega\, t)}}$$

Signal résultant (2)

Dans le cas où les deux fréquences sont proches, $\delta\omega \ll \omega$, c'est-à-dire $\cos(\delta\omega \times t)$ oscille très lentement par rapport à $\cos(\omega t)$. On peut donc voir la formule précédente comme étant celle d'un signal sinusoïdal dont l'amplitude varie lentement dans le temps : $A(t)\cos(\omega t)$ avec $A(t) = S_0 \cos(\delta\omega \times t)$



Signal résultant (3)



Ce phénomène est appelé **phénomène de battements,** il apparait lorsque deux signaux **de fréquences proches** se superposent : il y a alors une **lente modulation de l'amplitude** du signal résultant. La fréquence de cette modulation **est directement liée à la différence de fréquence** entre les deux signaux.

Signal résultant (4)

On mesure l'intervalle de temps entre deux annulations. Ce temps correspond à des annulations du cosinus, donc à une différence de phase de π. On a donc

$$\Delta t\,\delta\omega = \pi \Longrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{\delta\omega}$$

$$\delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \pi(f_2 - f_1) \Longrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{\delta\omega} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

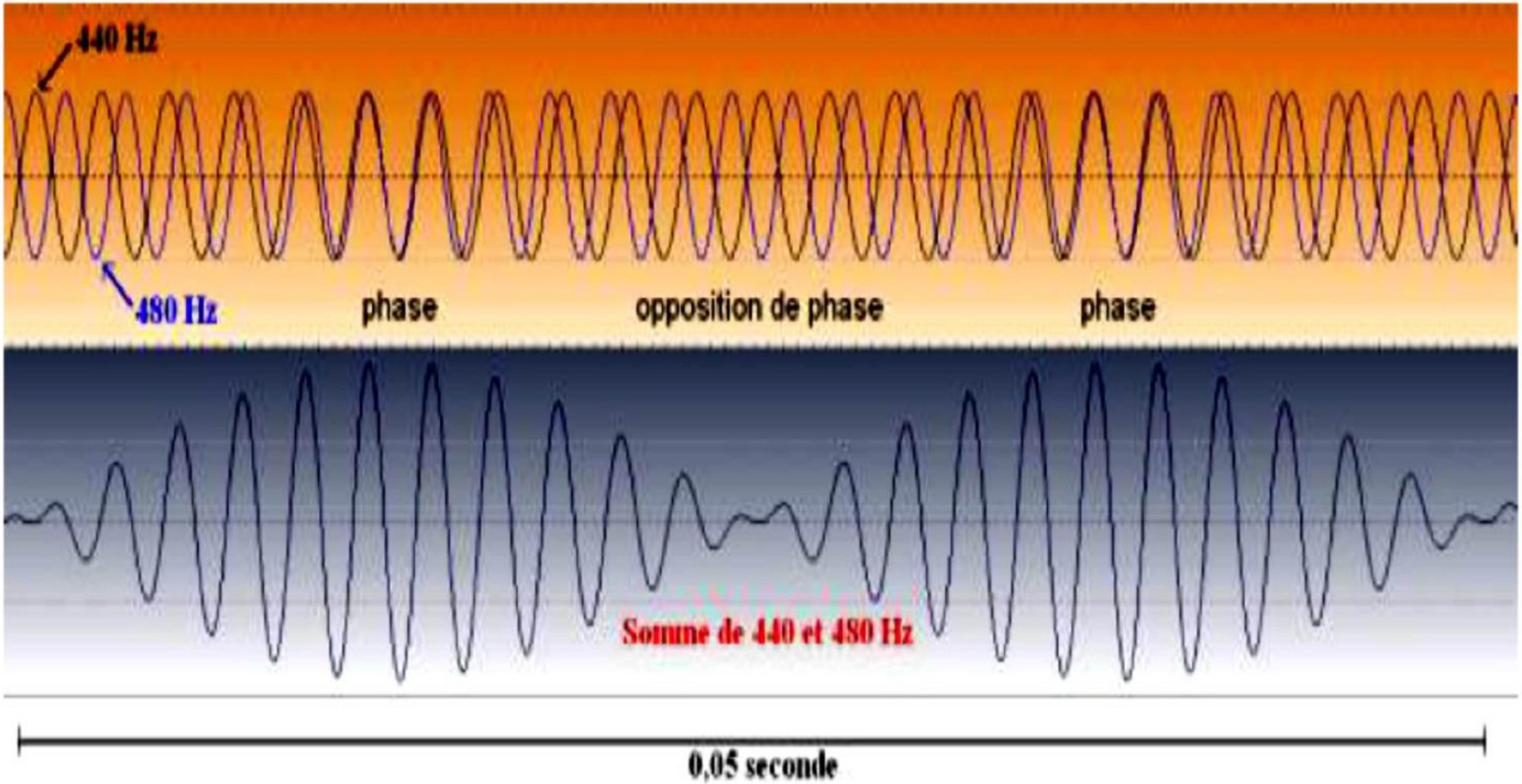
$$\Longrightarrow \boxed{\boxed{\boldsymbol{f_2 - f_1 = \frac{1}{\Delta t}}}}$$

Signal résultant (5)

Deux signaux de fréquences proches f_1 et f_2 donnent par superposition, un signal de fréquence moyenne $f_{moy} = (f_1 + f_2)/2$ mais modulé avec une fréquence de battements $f_{batt} = |f_2 - f_1|/2$. L'amplitude minimale est $S_{min} = |S_1 - S_2|$ et l'amplitude maximale est $S_{max} = S_1 + S_2$. On peut écrire $S(t)$ sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{S(t) = S_{max}\cos(2\pi f_{batt} t)\cos\left(2\pi f_{moy}\, t\right)}}$$

Signal résultant (6)



Signal résultant (7)

- On note que du signal résultant varie entre $2S_0$ (obtenue aux instants où S_1 et S_2 sont en phase) et 0 (aux instants où S_1 et S_2 sont en opposition de phase.
- La valeur du signal résultant passe périodiquement par des valeurs nulles, car on a choisi des amplitudes égales pour les deux signaux. **Si les amplitudes ne sont pas égales on a encore des battements, mais l'amplitude de l'enveloppe ne s' annule pas et passe seulement par des minima**

Ondes stationnaires et modes propres

Superposition de deux ondes progressives de même amplitude (1)

On étudiera la superposition dans tout l'espace de deux ondes de même fréquence et même amplitude se propageant en sens inverse. Ces deux ondes progressives s'écrivent :

$$s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$
$$s_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

où $k = \omega/c$.

Elles se propagent le long de l'axe (Ox) en sens opposées.

On peut écrire l'onde qui résulte de la superposition de ces deux ondes $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$ sous la forme :

$$s(x,t) = 2A\cos\left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)\right)$$

Superposition de deux ondes progressives de même amplitude (2)

Cette expression mathématique montre que l'onde $s(x,t)$ est de nature totalement différente des ondes $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$. En effet, on n'a plus la combinaison linéaire $\omega t - kx$ ou $\omega t + kx$ qui traduit la propagation d'une onde, mais au contraire une séparation de la variable spatiale x et de la variable temporelle t. **Une telle onde ne se propage pas mais vibre sur place et elle est appelée onde stationnaire.**

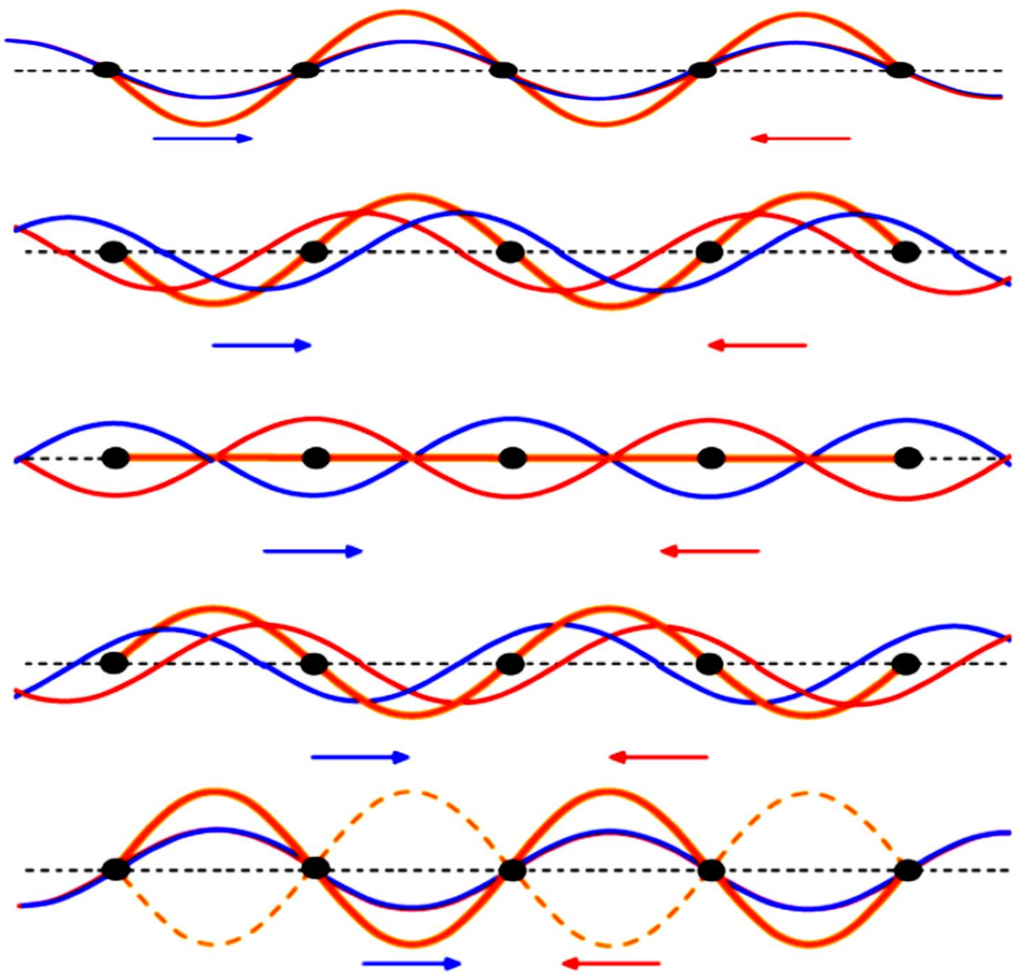
Onde stationnaire (1)

Une onde stationnaire harmonique est une onde de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = 2A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}}$$

avec $k = \omega/c$ où c est la célérité des ondes progressives de même nature physique. L'onde stationnaire est égale à la superposition de 2 ondes progressives sinusoïdales de pulsation ω se propageant en sens inverse le long de l'axe (Ox) , ayant la même amplitude A.

Onde stationnaire (2)



L'onde résultante est représentée à différents instants en rouge. **On constate que cette onde ne se déplace ni à gauche ni à droite. Cette onde est appelée stationnaire car les « creux » et les « crêtes » restent « sur place », aucune énergie ne se propage, elle oscille sur place !**

Nœuds et ventres de vibration (1)

L'amplitude de l'onde $s(x,t)$ dépend de la position x (alors que ce n'est pas le cas pour une onde progressive) et elle est donnée par :

$$\boxed{\boxed{\mathcal{A}(x) = |2A\cos(kx+\psi)|}}$$

On appelle **nœuds de vibration**, les points pour lesquels l'onde stationnaire est nulle à chaque instant. Ce sont les points pour lesquelles $\mathcal{A}(x) = 0$, leurs abscisses x vérifient :

$$\cos(kx+\psi) = 0 \Longrightarrow kx+\psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{\psi}{k} + \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Longrightarrow \boxed{\boxed{x_{\text{Nœud}} = -\frac{\psi}{k} + \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \text{ ,avec } n \text{ entier}}}$$

Nœuds et ventres de vibration (2)

Dans le cas particulier où $\psi = 0$ on a :

$$\boxed{x_{\text{Nœud}} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}\ \text{, avec}\ \ n\ \ \text{entier}}$$

Remarque : cette propriété met en évidence le fait que dans certaines situations la somme de deux sons produit du silence. Certains casques antibruit sont conçus sur cette propriété.

Les nœuds de vibration sont donc régulièrement espacés et la distance entre deux nœuds consécutifs d'ordre n et $n+1$ est :

$$\boxed{x_{\text{Nœud},n+1} - x_{\text{Nœud},n} = \frac{\lambda}{2}}$$

Nœuds et ventres de vibration (3)

Il existe aussi des points en lesquels l'amplitude $\mathcal{A}(x)$ de l'onde stationnaire est maximale. Ces points sont appelés **ventres de vibration.** Ce sont les points pour lesquels $\mathcal{A}(x) = 2A$; leurs abscisses x vérifient :

$$\cos(kx + \psi) = \pm 1 \Longrightarrow kx + \psi = n\pi \text{ , avec } n \text{ entier}$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\pi}{k} \text{ , avec } n \text{ entier}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Longrightarrow \boxed{x_{Ventre} = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\lambda}{2} \text{ , avec } n \text{ entier}}$$

Nœuds et ventres de vibration (4)

Dans le cas particulier où $\psi = 0$ on a :

$$\boxed{x_V = n\frac{\lambda}{2}\text{, avec } n \text{ entier}}$$

Les ventres de vibration sont donc régulièrement espacés et la distance entre 2 ventres consécutifs d'ordre n et $n+1$ est

$$\boxed{x_{V,n+1} - x_{V,n} = \frac{\lambda}{2}}$$

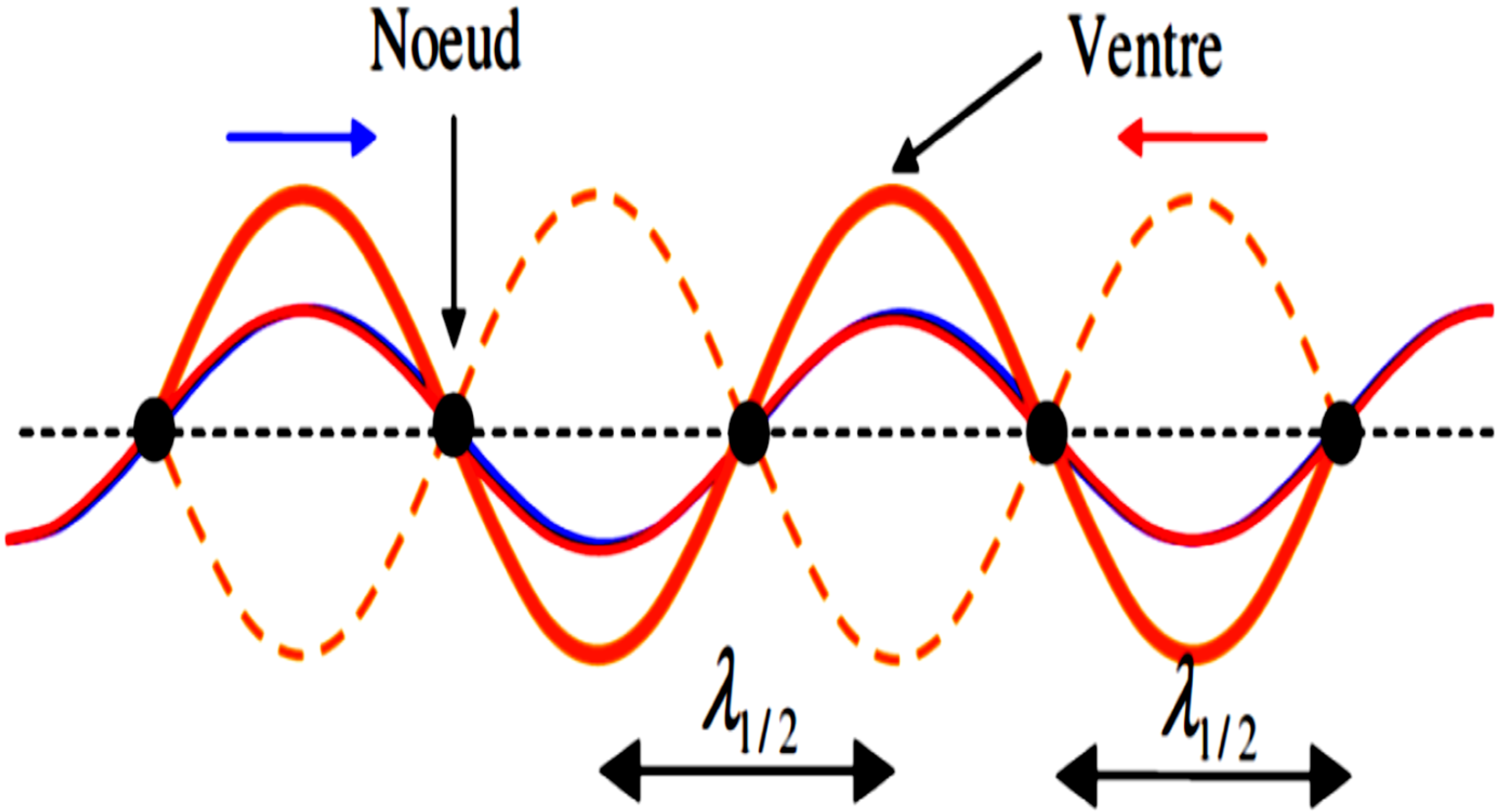
De plus, le milieu de 2 nœuds de vibration consécutifs est un ventre de vibration et vice versa

Nœuds et ventres de vibration (5)

Récapitulons :

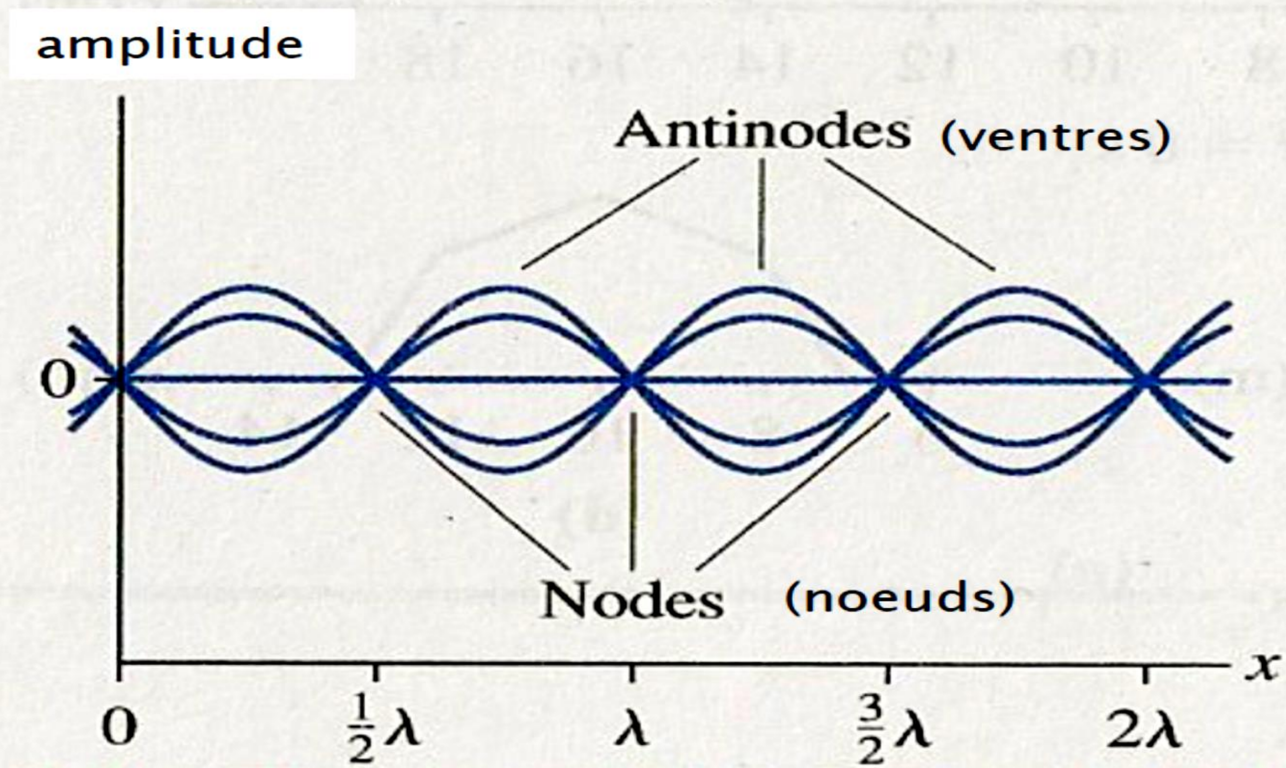
- les nœuds de vibration sont les points où la vibration s'annule quelle que soit la date t
- les ventres de vibration sont les points où l'amplitude de la vibration est maximale.
- les nœuds et les ventres sont disposés de manière alternée. La distance entre un nœud et un ventre consécutif est $\lambda/4$. La distance entre 2 nœuds ou deux ventres consécutifs est $\lambda/2$.
- l'existence de nœuds et de ventres de vibration est une propriété caractéristique des ondes stationnaires.
- les ventres sont le siège d'interférences constructives et les nœuds le siège d'interférences destructives

Nœuds et ventres de vibration (6)



Nœuds et ventres de vibration (7)

FIGURE 21.5 Standing waves are often represented as they would be seen in a time-lapse photograph.



The nodes and antinodes are spaced $\lambda/2$ apart.

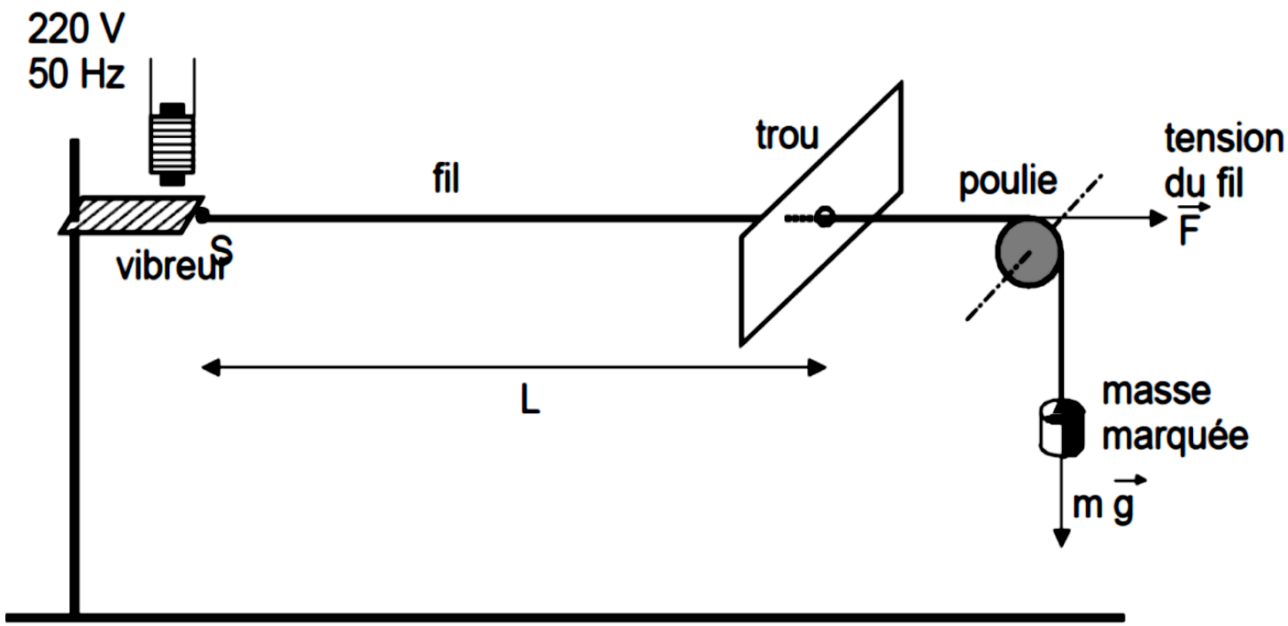
Phase initiale de l'onde stationnaire

L'onde stationnaire $s(x,t)$ peut s'écrire :

- si $\cos(kx+\psi) > 0$; $s(x,t) = \mathcal{A}(x)\cos(\omega t+\varphi)$
- si $\cos(kx+\psi) < 0$; $s(x,t) = -\mathcal{A}(x)\cos(\omega t +$

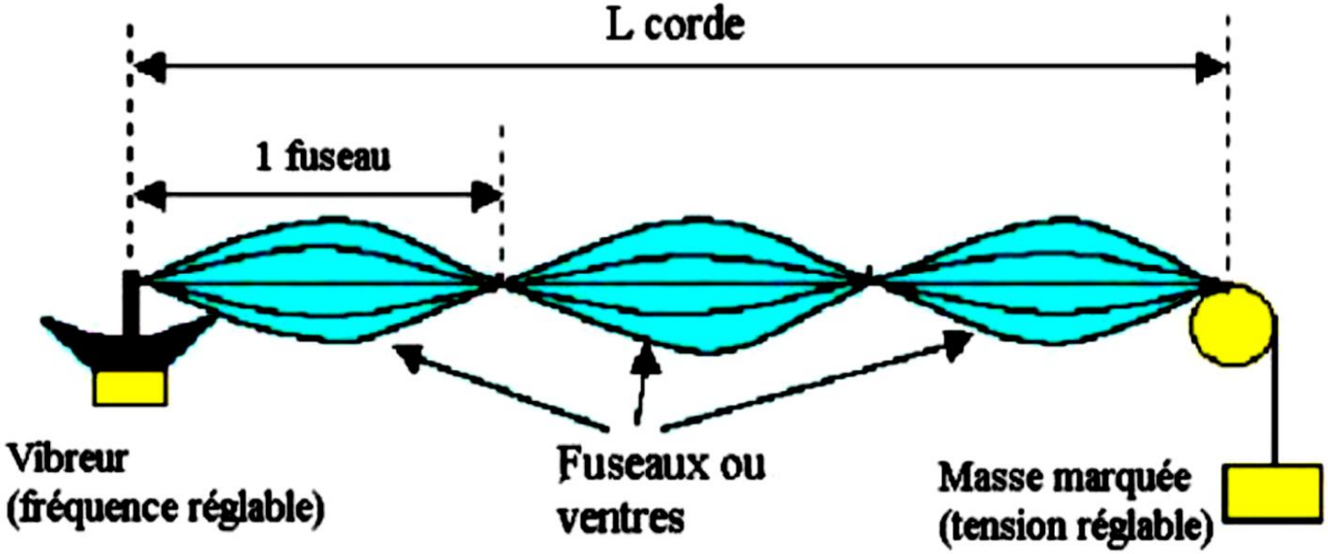
Corde de Melde (1)

Une corde de longueur L est placée horizontalement sur deux tiges en fer. À l'une des extrémités de la corde nous attachons un poids de masse m. Un vibreur fait vibrer la corde selon une intensité variable.



Corde de Melde (2)

Nous constatons qu'il se produit un mouvement particulier de la corde qui présente des ventres et des nœuds en différents points. Des ondes stationnaires s'établissent donc le long de la corde. Les vibrations peuvent être transversales, longitudinales.



Corde de Melde (3)

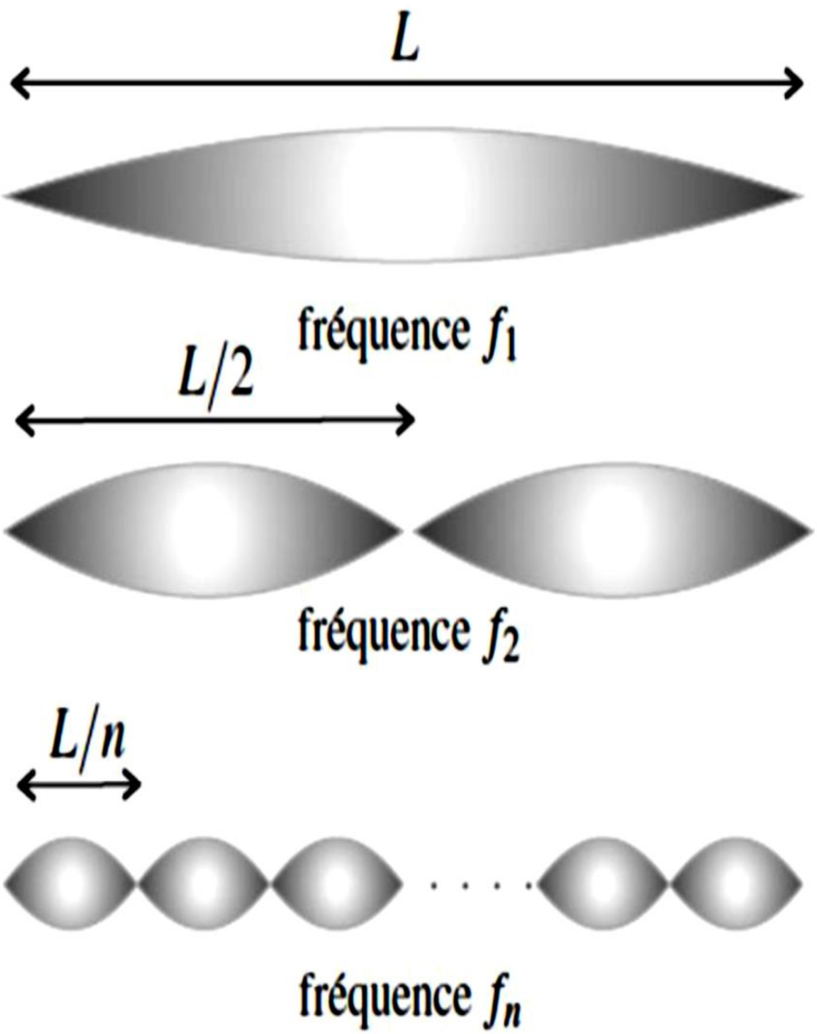
Etant donnée que la corde est fixe en ses deux extrémités, il s'agit de nœuds de l'onde stationnaire. La distance entre les nœuds vaut $\lambda/2$, la longueur de la corde ne peut être qu'un multiple entier de $\lambda/2$ donc $L = n\,\lambda/2$ avec n un entier positif. On a donc un résultant intéressant, **seules certaines longueurs d'ondes sont possibles** et elles sont données par :

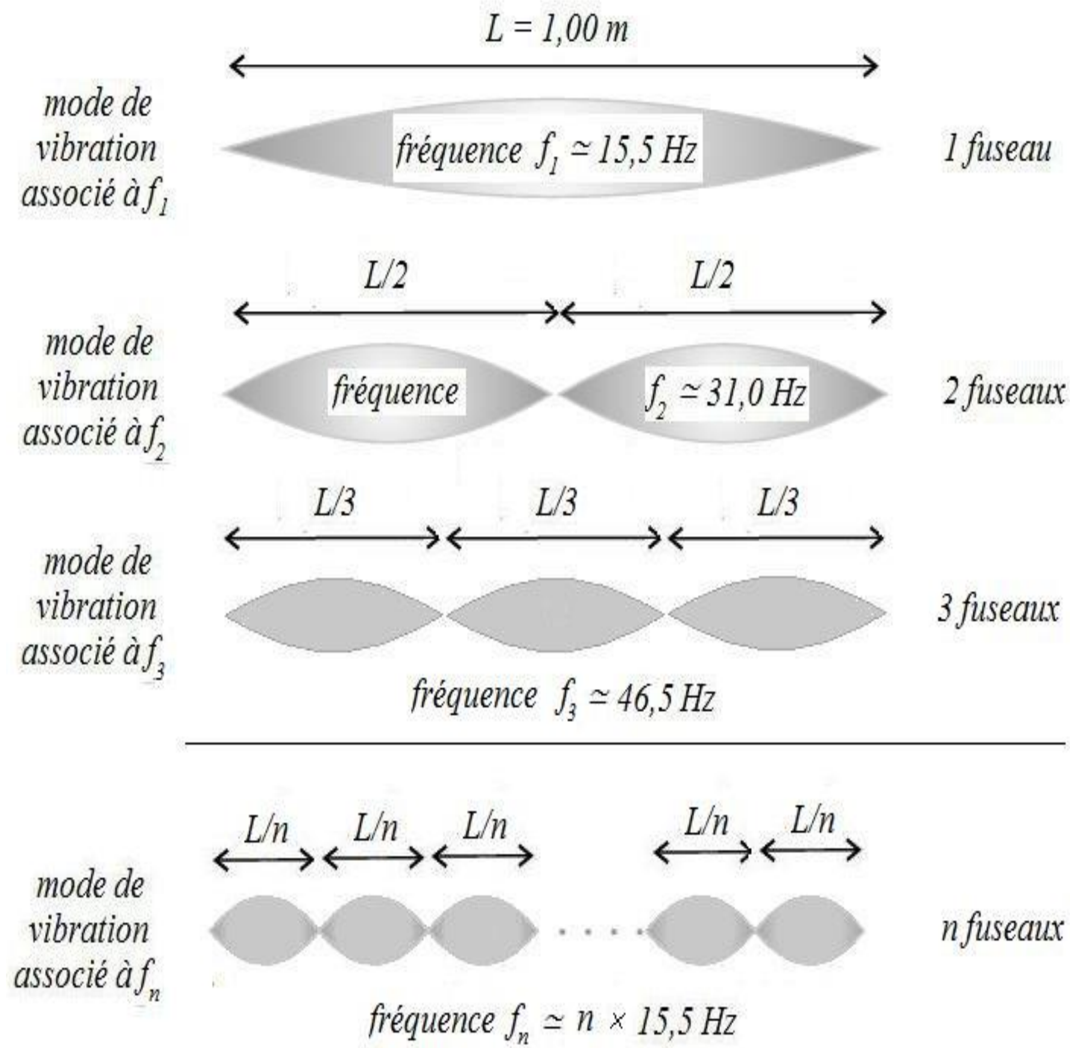
$$\boxed{\boldsymbol{L = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}}}$$

On en déduit la fréquence f_n de l'onde :

$$\boxed{\boldsymbol{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}}}$$

Corde de Melde (4)





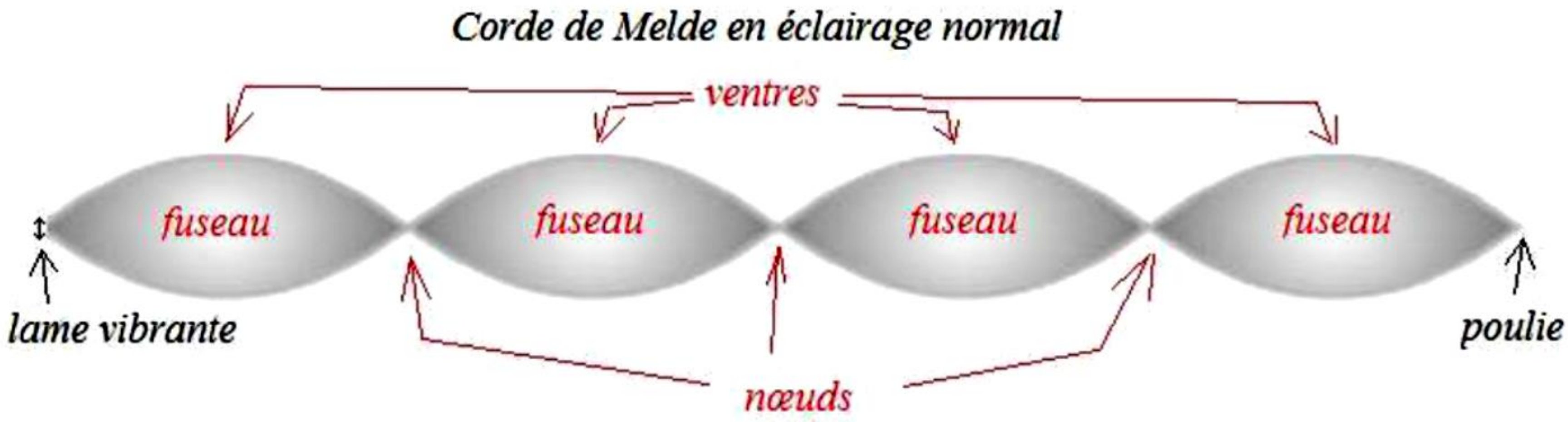
Corde de Melde (5)

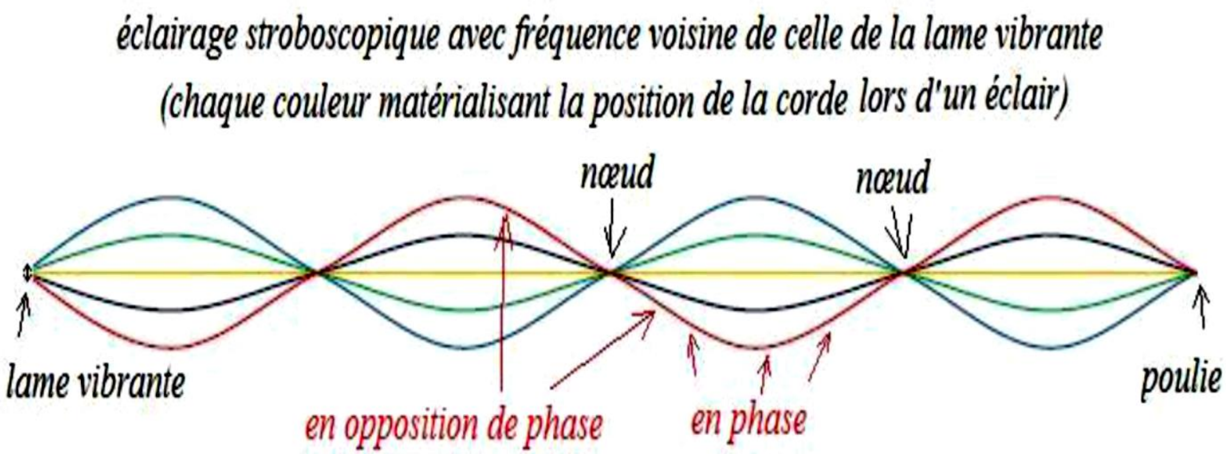
- La fréquence la plus élevée $\boldsymbol{f_1 = c/2L}$ pour $n = 1$ s'appelle **la fréquence fondamentale** (ou simplement le fondamental). Elle correspond à $\lambda = 2L$.
- Les fréquences suivantes, plus hautes, s'appellent **les harmoniques :** $\boldsymbol{f_n = nf_1}$
- Pour chaque harmonique de rang n , il y a n ventres et $n+1$ nœuds.
- la vibration harmonique de rang n , s'appelle **une mode propre de vibration.**
- La fondamentale et les harmoniques forment une série de fréquences : $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{2f_1}$, $\boldsymbol{3f_1}$, $\boldsymbol{4f_1}$,...

Observation stroboscopique (1)

L'observation stroboscopique permet de confirmer le caractère stationnaire de l'onde. Un **stroboscope** est un dispositif fournissant un éclairage intermittent, composé de brefs éclairs régulièrement espacés d'une durée T_{strobo} qui est la période du stroboscope. Lorsque la corde est éclairé par le stroboscope, on la voit à des instants $t_i = t_0 + iT_{strobo}$ où i est un entier . Si T_{strobo} est égale à la période de vibration de la corde, un point est toujours vu dans la même position, donc la corde paraît fixe

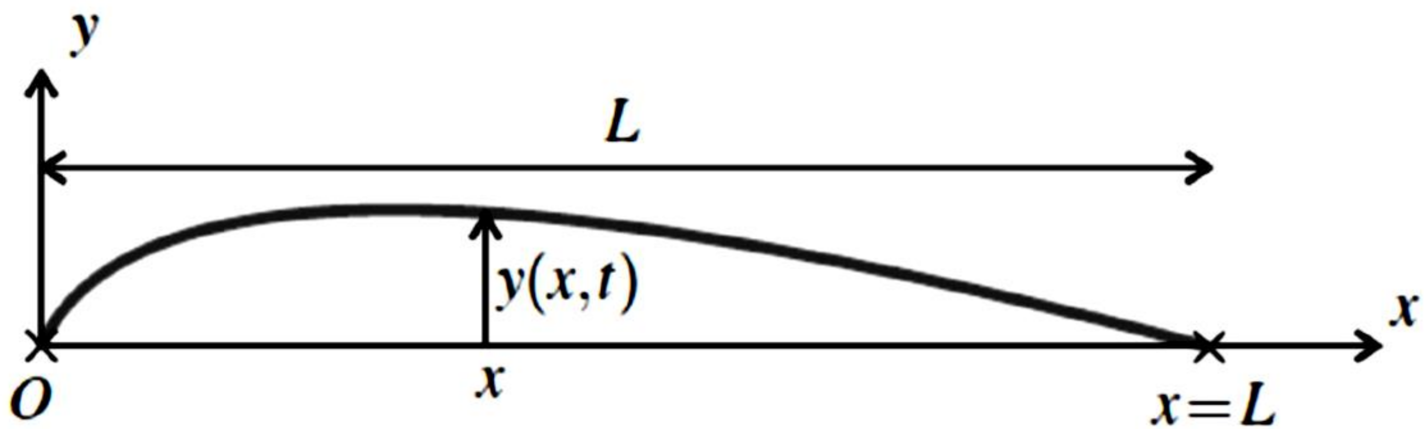
Observation stroboscopique (2)





Modes propres (1)

On s'intéresse aux vibrations d'une corde de longueur L finie, fixée entre deux points (il s'agit par exemple d'une corde de guitare). **Ces vibrations sont des superpositions de vibrations sinusoïdales appelés modes propres.** On recherche les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur L dont les extrémités sont fixes. On prend un axe (Ox) le long de la corde. Les deux extrémités fixes de la corde étant $x = 0$ et $x = L$. On suppose que la corde reste comprise dans le plan (Oxy) et on appelle $y(x,t)$ le déplacement supposé transversal du point de la corde d'abscisse x.



Modes propres (2)

Les conditions aux limites imposent que les deux extrémités de la corde soient des nœuds de vibration, soit

$$\cos(\psi) = 0 \ \ et \ \ \cos(kL + \psi) = 0$$

$$\cos(\psi) = 0 \Longrightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Du fait que

$$\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kx)$$

on prendra $\psi = -\pi/2$ de sorte que

$$\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$$

La condition $\cos(kL + \psi) = \sin(kL) = 0$ devient $kL = n\pi$. Les valeurs possibles de k sont donc :

Modes propres (3)

$$\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}, \qquad \text{avec } n \text{ entier}}$$

On en déduit les valeurs possibles de la pulsation ω, en notant c la célérité des ondes se propageant le long de la corde :

$$\boxed{\omega_n = ck_n = n\frac{\pi c}{L}, \text{avec } n \text{ entier}}$$

Les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur L fixée en ses extrémités sont :

$$\boxed{y(x,t) = A\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi\right)}$$

Modes propres (4)

où n est un entier, A et φ sont des constantes quelconques.

Ce sont les modes propres de vibration de la corde. Les fréquences des modes propres appelées fréquences propres sont :

$$\boxed{f_n = n\frac{c}{2L}}$$

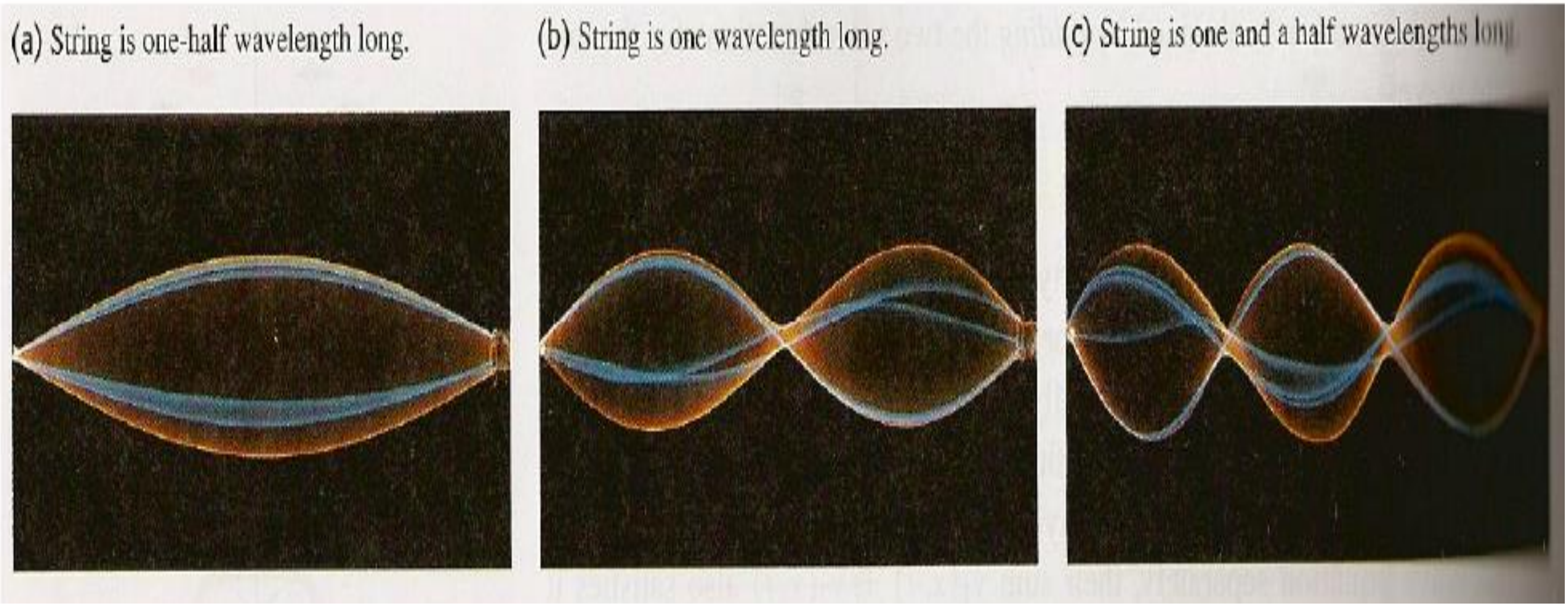
Les longueurs d'ondes correspondantes

$$\boxed{\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}}$$

sont les sous-multiples entiers de $2L$.

Modes propres (5)

La figure ci-dessous montre les vibrations d'une corde réelle pour les trois premiers modes propres.



Modes propres (6)

Les modes propres sont les vibrations sinusoïdales de la corde. **Le mouvement le plus général de la corde n'est pas sinusoïdal mais c'est une superposition des différents modes propres**. Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par superposition linéaire de tous ses modes propres soit :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi_n\right)}$$

où les A_n et φ_n sont des constantes quelconques qui dépendent des conditions initiales du mouvement. Comme les modes ont des fréquences toutes multiples de f_1, le mouvement est périodique de fréquence f_1.

Application aux instruments de musique

Modes propres (1)

- Dans une corde d'instrument, tous les modes propres coexistent à des amplitudes qui dépendent de la nature de l'instrument, son timbre. La somme de tous ces modes n'est autre que **la décomposition de Fourier de la vibration** donc du son produit par la corde.
- La vibration est transmise à l'aire (onde sonore) et amplifiée par la caisse de résonance ou un dispositif électronique.

Modes propres (2)

- Les mêmes conclusions peuvent être appliquées aux instruments à vent, à la différence que le signal est directement une onde sonore, c'est-à-dire une vibration longitudinale de l'air dans un tuyau. On pourra avoir des conditions aux limites différentes selon que l' extrémité des tuyaux est ouverte ou fermée. On peut dans ce cas s' intéresser au déplacement de la tranche d'air ou à la suppression générée par l'onde.

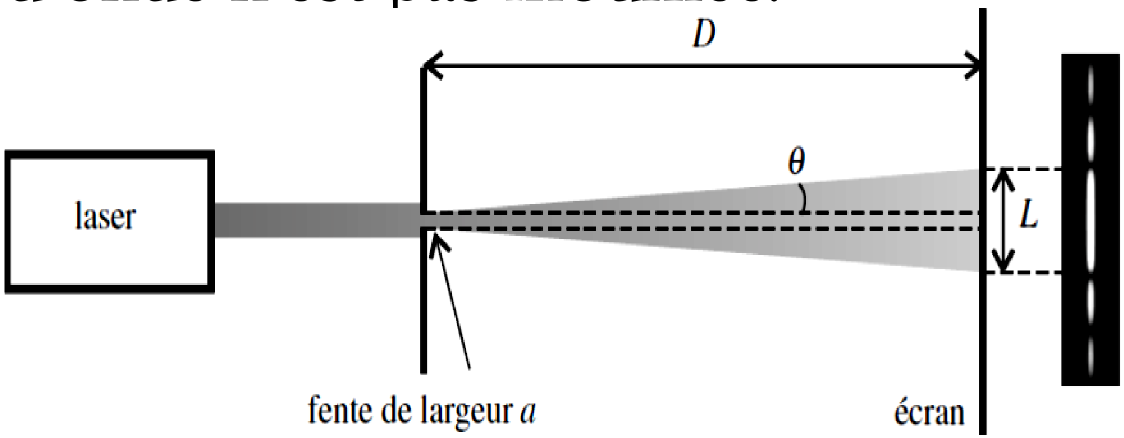
On aura alors les conditions aux limites suivantes:

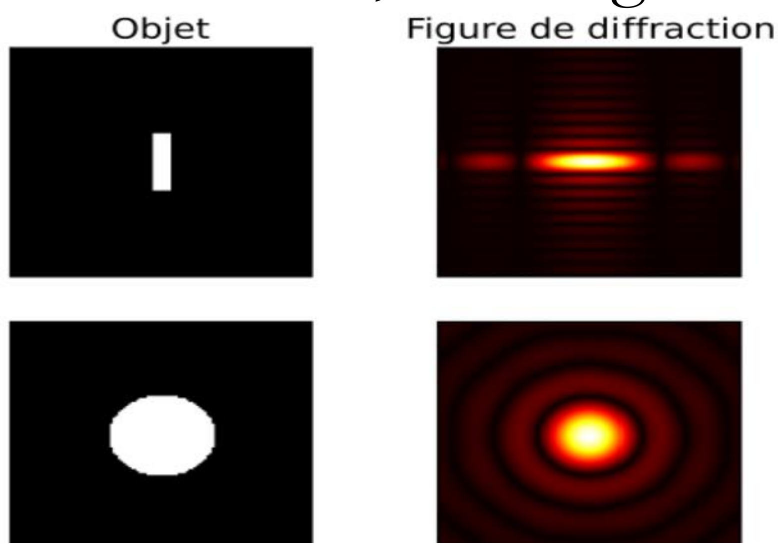
- ✓ **Extrémité fermée: nœud de déplacement, ventre de suppression**
- ✓ **Extrémité ouverte: ventre de déplacement, nœud de suppression**

Diffraction

Mise en évidence du phénomène

La diffraction est un phénomène typique des ondes, qui résulte de **la superposition d'ondes multiples**, engendrées en chaque point d'un espace où l'on contraint l'onde par un obstacle. **L'onde résultante existe alors en des points du milieu** qui ne devraient pas être atteints si la propagation de l'onde incidente n'était pas modifiée par l'obstacle. Si le milieu reste le même, la longueur d'onde n'est pas modifiée.





Définitions

❑ On parle de **diffraction** d'une onde quand il y a modification de la propagation de cette onde lorsqu'elle rencontre un obstacle (ouverture ou objet).

❑ L'onde obtenue après l'obstacle est appelée **onde diffractée.**

❑ La diffraction devient perceptible lorsque les dimensions de l'obstacle sont de l'ordre de la longueur d'onde et elle est d'autant plus accentuée que l'obstacle est petit.

❑ La diffraction peut se produire aussi bien avec des **ondes mécaniques** (ondes sonores, déformations de la surface de l'eau, etc.) qu'avec des **ondes électromagnétiques** (lumière visible, rayons X…) voire avec des **ondes de matière** (faisceaux d'électrons).

Loi de la diffraction

Le faisceau diffracté par une fente de largeur a se trouve essentiellement dans un cône de demi-angle d'ouverture θ, correspondant à la tache centrale de la figure de diffraction, vérifiant la relation :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\lambda}{a}}$$